9ο online μάθημα

30/4/2020

Θεώρημα: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a<b$ το κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη: Έστω $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $[a,b] \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. Θέτουμε $A = \{t \in [a,b] : \exists J \subseteq I$ με J πεπερασμένο ώστε $[a,t] \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i\}$

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι $b\in A$.

1) $a\in A$ (Πράγματι $\exists i_0 \in I$ ώστε $a \in G_{i_0}$ οπότε για $J=\{i_0\}$ το έχουμε)
2) Το A περιέχει και άλλα στοιχεία εκτός του a.
3) Το A είναι προφανώς άνω φραγμένο (το b είναι ένα άνω φράγμα)
4) Εφόσον το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο από το αξίωμα της πληρότητας έχει supremum θέτουμε $x=\sup A$. Σύμφωνα με το 2), 3) θα έχουμε $a<x\le b$
5) $x\in A$ και $x=b$. Δείχνουμε πρώτα ότι $x\in A$. Επιλέγουμε $j_0\in I$ ώστε $x\in G_{j_0}$. Εφόσον το G_{j_0} είναι ανοιχτό υπάρχει $\delta>0$ ώστε $(x-\delta,x+\delta)\subseteq G_{j_0}$ εφόσον $x=\sup A$ υπάρχει $t\in A$ με $x-\delta<t$. Αφού $t\in A$ υπάρχει $J\subseteq I$, J πεπερασμένο ώστε $[a,t]\subseteq \bigcup_{i\in J} G_i$

Εφόσον $[t,x] \subseteq (x-\delta,x+\delta)\subseteq G_{j_0}$ και άρα $[a,x]\subseteq \bigcup_{i\in J\cup\{j_0\}} G_i$ με

το $J\cup\{j_0\}$ πεπερασμένο συμπεραίνουμε $x\in A$.

Δείχνουμε τώρα ότι $x=b$. Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $x<b$. Εφόσον $(x-\delta,x+\delta)\subseteq G_{j_0}$ επιλέγοντας s με $x<s<\min\{x+\delta, b\}$ έχουμε ότι $[x,s]\subseteq G_{j_0}$. και άρα εφόσον $[a,x]\subseteq \bigcup_{i\in J\cup\{j_0\}} G_i$ θα έχουμε $[a,b]\subseteq \bigcup_{i\in J\cup\{j_0\}} G_i$

συνεπώς $s\in A$. Αυτό είναι άτοπο εφόσον $s>x=\sup A$. Επομένως $x=b$ και άρα $b\in A$. Η απόδειξη είναι πλήρης.

Σημείωση: Η παραπάνω απόδειξη στηρίχθηκε στον ορισμό της συμπάγειας.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι συμπαγές.

Απόδειξη: Έστω F κλειστό υποσύνολο του X και $(G_i)_{i\in I}$ οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του X ώστε $F \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. Εφόσον το σύνολο $X\setminus F$ είναι ανοιχτό. Θέτοντας $G_{i_0} = X\setminus F$ έχουμε $X = F\cup(X\setminus F) \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \cup (X\setminus F) = \bigcup_{i\in I\cup\{i_0\}} G_i$. Εφόσον ο X είναι συμπαγής, το ανοιχτό κάλυμμα $(G_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα άρα $\exists n\in\mathbb{N}$ $i_1,\dots,i_n\in I$ ώστε $X = \bigcup_{\kappa=0}^{n} G_{i_\kappa}$, άρα $X = (X\setminus F)\cup\left(\bigcup_{\kappa=1}^{n} G_{i_\kappa}\right)$ συνεπώς $F \subseteq \bigcup_{\kappa=1}^{n} G_{i_\kappa}$. Επομένως το F είναι συμπαγές.

Πρόταση: Κάθε κλειστό ① και φραγμένο ② υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη: Έστω F ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Εφόσον το F είναι φραγμένο $\exists a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ ώστε $F\subseteq[a,b]$. Αφού το $[a,b]$ είναι συμπαγές και το F είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[a,b]$ από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι το F είναι συμπαγές.

Πρόταση: Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι πλήρης.

Απόδειξη: Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Θα χρησιμοποιήσουμε το χαρακτηρισμό του Cantor για τους πλήρεις μετρικούς χώρους. Έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών συνόλων με $\mathrm{diam}(F_n)\to 0$. Τότε η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Αφού ο X είναι συμπαγής συμπεραίνουμε ότι $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Επομένως ο (X,ρ) είναι πλήρης.

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μ.χ. Ο (X,ρ) λέγεται ακολουθιακά συμπαγής αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X υπάρχει ακολουθία

$(x_{\kappa_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x\in X$ ώστε $x_{\kappa_n} \xrightarrow{\rho} x$. Επίσης ένα $K\subseteq X$ λέγεται ακολουθιακά συμπαγές αν ο (K, ρ_K) όπου ρ_K η σχετική μετρική είναι ακολουθιακώς συμπαγής

Ορισμός: Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται ολικά φραγμένος αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ και $x_1,\dots,x_m\in X$ ώστε $X=\bigcup_{\kappa=1}^{m} B_\rho(x_\kappa,\varepsilon)$

Γενικότερα ένα $A\subseteq X$ λέγεται ολικά φραγμένο αν
$\forall \varepsilon>0 \ \exists m\in\mathbb{N} \ \exists x_1,\dots,x_m\in X: \ A\subseteq \bigcup_{\kappa=1}^{m} B_\rho(x_\kappa,\varepsilon)$

Παρατηρούμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής:
$\forall \varepsilon>0 \ \exists m\in\mathbb{N} \ \exists x_1,\dots,x_m\in A: \ A\subseteq \bigcup_{\kappa=1}^{m} B_\rho(x_\kappa,\varepsilon)$

Παραδείγματα: α) Ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι ολικά φραγμένος π.χ. για $\varepsilon=1$ δεν υπάρχουν $m\in\mathbb{N}$ και $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}$ ώστε
$\mathbb{R}=\bigcup_{\kappa=1}^{m}(x_\kappa-1, x_\kappa+1)$

β) Ο διακριτός μ.χ. (X,ρ) είναι ολικά φραγμένος αν-ν το X είναι πεπερασμένο.
γ) Αν $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$ το (a,b) είναι ολικά φραγμένο. Πράγματι αν $\varepsilon>0$ επιλέγονται $a<x_1<x_2<\dots<x_m<b$ ώστε $x_1-a<\varepsilon$, $b-x_m<\varepsilon$, $x_i-x_{i-1}<\varepsilon$ $i=2,\dots,m$ προκύπτει ότι
$(a,b)\subset\bigcup_{\kappa=1}^{m}(x_\kappa-\varepsilon, x_\kappa+\varepsilon)$

Θεώρημα: Έστω (X,ρ) μ.χ. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(1) Ο (X,ρ) είναι συμπαγής
(2) Για κάθε άπειρο υποσύνολο A του X ισχύει $A'\neq\emptyset$
(3) Ο (X,ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής
(4) Ο (X,ρ) είναι πλήρης και ολικά φραγμένος

Απόδειξη: (1) => (2) Έστω A ένα υποσύνολο του X με $A' = \emptyset$. Για κάθε $x \in X$ ισχύει $x \notin A'$ άρα υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon_x) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$ ή ισοδύναμα $B_\rho(x, \varepsilon_x) \cap A \subseteq \{x\}$.
Το $(B_\rho(x, \varepsilon_x))_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X συνεπώς υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_m \in X$ ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{m} B_\rho(x_k, \varepsilon_{x_k})$ τότε

$$A = A \cap X = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} B_\rho(x_k, \varepsilon_{x_k})\right) = \bigcup_{k=1}^{m} \left(A \cap B_\rho(x_k, \varepsilon_{x_k})\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \{x_k\} =$$

$= \{x_1, \dots, x_m\}$ άρα το A πεπερασμένο. Επομένως για κάθε άπειρο $A \subseteq X$ ισχύει $A' = \emptyset$.

(2) => (3) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο X. Θεωρούμε το σύνολο των όρων της ακολουθίας δηλαδή το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

(α) Αν το A είναι πεπερασμένο τότε υπάρχει $x \in X$ και φυσικοί $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < \dots$ ώστε $x_{k_n} = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η υπακολουθία $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x δηλαδή $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$.

(β) Αν το A είναι άπειρο. Από την υπόθεση έχουμε $A' \neq \emptyset$ και άρα υπάρχει $x \in A'$ άρα $\forall \varepsilon > 0$ $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ δηλαδή $B_\rho(x, \varepsilon) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Επαγωγικά θα κατασκευάσουμε ακολουθία φυσικών $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ και $\rho(x_{k_n}, x) < \frac{1}{n}$ $\forall n$.

1ο επαγωγικό βήμα: Επιλέγουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{k_1}, x) < 1$
Γενικό επαγωγικό βήμα: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί $k_1 < \dots < k_n$ ώστε $\rho(x_{k_i}, x) < \frac{1}{i}$, $i = 1, \dots, n$. Θέτουμε

$M = \{m \in \mathbb{N} : m > k_n \ \rho(x_m, x) < 1/n+1\}$. Τότε $M \neq \emptyset$.
Θέτοντας $k_{n+1} = \min M$ έχουμε $k_{n+1} > k_n$ και $\rho(x_{k_{n+1}}, x) < \frac{1}{n+1}$

Η επαγωγική κατασκευή είναι πλήρης. Έτσι η $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και άρα $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Υποθέτουμε ότι ο (X,ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής

Ο (X,ρ) είναι πλήρης.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στο X. Εφόσον ο (X,ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $x\in X$ ώστε $x_{k_n}\xrightarrow{\rho}x$. Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική και έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει στο x συμπεραίνουμε ότι $x_n\xrightarrow{\rho}x$

Ο (X,ρ) είναι ολικά φραγμένος.

Με επαγωγή σε άτοπο. Υποθέτοντας ο (X,ρ) δεν είναι ολικά φραγμένος. Υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε: για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $y_1,\dots,y_m\in X$ ισχύει $X\neq\bigcup_{k=1}^{m}B_\rho(y_k,\varepsilon)$ (*)

Χρησιμοποιώντας την (*) θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $(x_n,x_m)\geq\varepsilon$ $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $n\neq m$. Επιλέγουμε τυχόν $x_1\in X$. Χρησιμοποιώντας την (*) επιλέγουμε $x_2\in X\setminus B_\rho(x_1,\varepsilon)$ τότε $\rho(x_1,x_2)\geq\varepsilon$. Υποθέτουμε ότι έχουν επιλεγεί $x_1,\dots,x_n\in X$ ώστε για κάθε $i,j\in\{1,\dots,n\}$ με $i\neq j$ να ισχύει $\rho(x_i,x_j)\geq\varepsilon$. Με χρήση της (*) επιλέγουμε $x_{n+1}\in X\setminus\bigcup_{k=1}^{n}B_\rho(x_k,\varepsilon)$. Τότε έχουμε $\rho(x_{n+1},x_k)\geq\varepsilon$ για $k=1,\dots,n$.

Η επαγωγική κατασκευή είναι πλήρης.

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο X και εφόσον ισχύει $\rho(x_n,x_m)\geq\varepsilon$ για κάθε $n,m\in\mathbb{N}$ με $n\neq m$ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει καμία βασική υπακολουθία άρα δεν έχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία

Άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι ο (X,ρ) είναι ακολουθιακά συμπαγής.

(4) $\Rightarrow$ (1) Έστω ότι ο (X,ρ) είναι πλήρης και ολικά φραγμένος. Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι ο (X,ρ) δεν είναι συμπαγής. Τότε υπάρχει μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων $(G_i)_{i\in I}$ του X ώστε $X=\bigcup_{i\in I}G_i$ και για κάθε $J\subseteq I$ με J πεπερασμένο να ισχύει $X\neq\bigcup_{i\in J}G_i$

Εφόσον ο (X,ρ) είναι ολικά φραγμένος υπάρχουν $N_1\in\mathbb{N}$ και $x_{11},x_{12},\dots,x_{1N_1}\in X$ ώστε $X=\bigcup_{k=1}^{N_1}B_\rho(x_{1k},1/2)$

Ισχυρισμός: Υπάρχει $J_1 \in \{1, \dots, N_1\}$ ώστε $B_\rho(x_{1J_1}, 1/2) \setminus \bigcup_{i \in J} G_i \neq \emptyset$

για κάθε $J \subseteq I$ με J πεπερασμένο.

Απόδειξη: Αν αυτό δεν ισχύει τότε για κάθε $k \in \{1, \dots, N_1\}$ υπάρχει $J_k \subseteq I$ με J_k πεπερασμένο ώστε $B_\rho(x_{1k}, 1/2) \subseteq \bigcup_{i \in J_k} G_i$

Αν $X = \bigcup_{k=1}^{N_1} B_\rho(x_{1k}, 1/2) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_1} \bigcup_{i \in J_k} G_i = \bigcup_{i \in J_1 \cup \dots \cup J_{N_1}} G_i$ άτοπο, διότι

το $J_1 \cup \dots \cup J_{N_1}$ είναι πεπερασμένο. Θέτουμε $x_1 = x_{1J_1}$

Εφόσον ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος υπάρχουν $N_2 \in \mathbb{N}$ και $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2N_2}$ ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{N_2} B_\rho(x_{2k}, 1/2^2)$

άρα $B_\rho(x_1, 1/2) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_2} B_\rho(x_{2k}, 1/2^2)$. Μπορούμε να υποθέσουμε

ότι $B_\rho(x_1, 1/2) \cap B_\rho(x_{2k}, 1/2^2) \neq \emptyset$ για κάθε $k = 1, \dots, N_2$

Όπως στον προηγούμενο ισχυρισμό υπάρχει $J_2 \in \{1, \dots, N_2\}$ ώστε $B_\rho(x_{2J_2}, 1/2^2) \setminus \left(\bigcup_{i \in J} G_i \right) \neq \emptyset$ για κάθε $J \subseteq I$ με J πεπερασμένο. Θέτουμε $x_2 = x_{2J_2}$. Εφόσον $B_\rho(x_1, 1/2) \cap B_\rho(x_2, 1/2^2) \neq \emptyset$

Συμπεραίνουμε ότι $\rho(x_1, x_2) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}$

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο ορίζεται επαγωγικά μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο X με τις εξής ιδιότητες:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και κάθε $J \subseteq I$, J πεπερασμένο ισχύει

$$B_\rho(x_n, 1/2^n) \setminus \bigcup_{i \in J} G_i \neq \emptyset$$

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\rho(x_n, x_{n+1}) < \frac{3}{2^{n+1}}$

Εφόσον $\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}} < \infty$

η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία.

Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$
Εφόσον $X = \bigcup_{i \in I} G_i$ υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0}$ και αφού το

G_{i_0} είναι ανοικτό υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B_\rho(x,\delta) \subseteq G_{i_0}$
Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $\frac{1}{2^n} \to 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \delta/2$

και $\frac{1}{2^n} < \delta/2$. Τοτε για κάθε $y \in B_\rho\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)$ ισχύει

$$\rho(y,x) \leq \rho(y,x_n) + \rho(x_n,x) < \frac{1}{2^n} + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

άρα $B_\rho\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \subseteq B_\rho(x,\delta) \subseteq G_{i_0}$ άτοπο

Επομένως ο (X,ρ) είναι συμπαγής.

Πρόταση: Έστω (X_1,ρ_1), (X_2,ρ_2) δύο μετρικοί χώροι και ρ μια μετρικοί γινόμενο στον $X = X_1 \times X_2$. Αν ο (X_1,ρ_1) και (X_2,ρ_2) είναι συμπαγής τότε και ο $(X_1 \times X_2, \rho)$ είναι συμπαγής.
Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε ότι η συμπάγεια είναι ισοδύναμη με την ακολουθιακή συμπάγεια. Έστω $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαία ακολουθία στο $X_1 \times X_2$. Εφόσον ο (X_1,ρ_1) είναι συμπαγής άρα ακολουθιακά συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $x \in X$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho_1} x$. Η $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στον συμπαγή άρα ακολουθιακά συμπαγή χώρο (X_2,ρ_2) υπάρχει υπακολουθία $(y_{k_{\lambda_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $y \in X_2$ ώστε $y_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\rho_2} y$. Όμως η $(x_{k_{\lambda_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ άρα $x_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\rho_1} x$. Από την υπόθεση, εφόσον η ρ είναι μετρική γινόμενο των ρ_1, ρ_2 συμπεραίνουμε $(x_{k_{\lambda_n}}, y_{k_{\lambda_n}}) \xrightarrow{\rho} (x,y)$. Επομένως ο $(X_1 \times X_2, \rho)$ είναι ακολουθιακά συμπαγής.

Παρατήρηση: Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για περισσότερους από δύο μετρικούς χώρους, δηλαδή αν $(X_i, \rho_i)_{i=1}^{k}$ είναι συμπαγείς μ.χ. και ρ μετρική γινόμενο στον $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ τότε ο (X,ρ) είναι συμπαγής

Πόρισμα: Στον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ τα σύνολα της μορφής $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k]$ είναι συμπαγή.

Θεώρημα: Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές αν-ν είναι κλειστό και φραγμένο.
Απόδειξη: Αν K συμπαγές τότε το K είναι κλειστό και φραγμένο.
Αντίστροφα αν το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ τότε $\exists M > 0$, $K \subseteq B_\rho(0, M)$. Άρα
$$K \subseteq \underbrace{[-M, M] \times [-M, M] \times \dots \times [-M, M]}_{k\text{-φορές}}$$

Το τελευταίο σύνολο είναι συμπαγές. Εφόσον το K είναι κλειστό, το K ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς είναι συμπαγές.

Θεώρημα (Λήμμα Lebesgue): Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $(G_i)_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $A \subseteq X$ μη κενό με $diam(A) < \delta$ υπάρχει $i \in I$ ώστε $A \subseteq G_i$.
Απόδειξη: Εφόσον $X = \bigcup_{i \in I} G_i$ για κάθε $x \in X$ υπάρχει $i_x \in I$ ώστε

$x \in G_{i_x}$ και άρα υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon_x) \subseteq G_{i_x}$.
Η οικογένεια $\left(B_\rho(x, \frac{\varepsilon_x}{2})\right)_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X

άρα αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_n \in X$ ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{n} B_\rho(x_k, \frac{\varepsilon_{x_k}}{2})$. Θέτουμε $\delta = \min\{\frac{\varepsilon_{x_k}}{2}, k = 1, \dots, n\}$

Τότε $\delta > 0$. Έστω τώρα A μη κενό υποσύνολο του X με $diam(A) < \delta$ επιλέγουμε τυχαίο $a \in A$. Τότε υπάρχει $k \in \{1, \dots, n\}$ ώστε $\rho(a, x_k) < \frac{\varepsilon_{x_k}}{2}$. Τότε ισχύει $A \subseteq G_{i_{x_k}}$.

Απόδειξη: Έστω $y \in A$. Τότε
$$\rho(y, x_k) \le \rho(y, a) + \rho(a, x_k) \le diam(A) + \frac{\varepsilon_{x_k}}{2}$$

$< \delta + \frac{\varepsilon_{x_k}}{2} \leq \frac{\varepsilon_{x_k}}{2} + \frac{\varepsilon_{x_k}}{2} = \varepsilon_{x_k}$

Άρα $A \subseteq B_\rho(x_k, \varepsilon_{x_k}) \subseteq G_{i_{x_k}}$.

Θεώρημα: Έστω (X,ρ) συμπαγής μ.χ., (Y,d) μ.χ. και $f: X \to Y$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Θα παραθέσουμε 2 διαφορετικές αποδείξεις.

1η Απόδειξη (Με χρήση του Λήμματος Lebesgue): Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f είναι συνεχής για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε $f(B_\rho(x,\delta_x)) \subseteq B_d(f(x), \varepsilon/2)$ (1).

Η οικογένεια $(B_\rho(x,\delta_x))_{x \in X}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X άρα από Λήμμα Lebegue υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε μη κενό $A \subseteq X$ με $diam(A) < \delta$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $A \subseteq B_\rho(x, \delta_x)$.

Έστω $a, b \in X$ με $\rho(a,b) < \delta$. Τότε για το σύνολο $A = \{a, b\}$ έχει διάμετρο ίση με $diam(A) = \rho(a,b) < \delta$ άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $\{a,b\} \subseteq B_\rho(x, \delta_x)$. Άρα λόγω της (1)

$d(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ και $d(f(b), f(x)) < \varepsilon/2$

Συνεπώς $d(f(a), f(b)) \leq d(f(a), f(x)) + d(f(b), f(x)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$

επομένως η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2η απόδειξη (σελ 15)

Θεώρημα: Έστω (X,ρ), (Y,d) μετρικοί χώροι και $f: X \to Y$ συνεχής. Αν το $K \subseteq X$ είναι συμπαγές τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. ($f(K) \subseteq Y$ συμπαγές)

Απόδειξη: Έστω $(G_i)_{i \in I}$ οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του Y με $f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. Τότε $K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i)$

Για κάθε $i \in I$ το $f^{-1}(G_i)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, ως αντίστροφη εικόνα ανοικτού συνόλου μέσω συνεχούς συνάρτησης. Εφόσον το K είναι συμπαγές υπάρχει $J \subseteq I$ με J πεπερασμένο ώστε $K \subseteq \bigcup_{i \in J} f^{-1}(G_i)$.

Τότε $f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{i \in J} f^{-1}(G_i)\right) = \bigcup_{i \in J} f(f^{-1}(G_i)) \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$

Άρα το $f(K)$ είναι συμπαγές.

Θεώρημα: Αν (X, ρ) συμπαγής μ.χ. και $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Απόδειξη: Εφόσον η f συνεχής και X συμπαγές το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ άρα είναι κλειστό και φραγμένο. Άρα υπάρχουν $\min f(X)$ και $\max f(X)$ δηλαδή υπάρχουν $x_0, y_0 \in X$ $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in X\}$ και $f(y_0) = \max\{f(x) : x \in X\}$

Θεώρημα: Αν X συμπαγής μ.χ., (Y, d) μ.χ. και $f: X \to Y$ συνεχής, 1-1 και επί τότε η $f^{-1}: Y \to X$ είναι επίσης συνεχής.

Απόδειξη: Καταρχήν $(f^{-1})^{-1} = f$. Για ν.δ.ο. η $f^{-1}: Y \to X$ είναι συνεχής αρκεί ν.δ.ο. αντιστρέφει κλειστά (υποσύνολα του X) σε κλειστά (υποσύνολα του Y). Έστω $K \subseteq X$ κλειστό. Τότε, εφόσον X συμπαγές το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Εφόσον η f είναι συνεχής το $f(K)$ είναι συμπαγές. Όμως $(f^{-1})^{-1}(K) = f(K)$ άρα το $(f^{-1})^{-1}(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y άρα κλειστό. Επομένως η f είναι συνεχής.

Σημείωση: Η συμπάγεια είναι τοπολογική ιδιότητα. Πράγματι αν (X, ρ) συμπαγής μ.χ. και (Y, d) είναι μ.χ. ομοιομορφικός του (X, ρ) υπάρχει $f: (X, \rho) \to (Y, d)$ 1-1, επί, συνεχής, f^{-1} συνεχής άρα το $Y = f(X)$ είναι συμπαγές.